VARIATIONSPRINZIPIEN FÜR KONSERVATIVE SYSTEME IN DER RELATIVISTISCHEN KONTINUUMSMECHANIK

von

H. G. SCHÖPF

Institut für Theoretische Physik, Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greifswald.

Eingegangen am 28. 9. 1963.

ZUSAMMENFASSUNG*

Es wird gezeigt, dass im Falle eines konservativen Systems, die Mechanik des Kontinuums in der allgemeinen Relativitätstheorie mit Hilfe einer gewöhnlichen Variationsmethode behandelt werden kann.

* Zusammenfassung der Redaktion.

In einer relativistischen Feldtheorie hat man ein Variationsprinzip

$$\delta \int \left\{ L(\psi^A, g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2\varkappa} R \right\} \sqrt{-g}\, d^4x = 0, \tag{1}$$

wobei L ein Funktional der Feldrößen ψ^A und des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ ist. Aus den Feldgleichungen

$$\frac{\delta L}{\delta \psi^A} = 0 \tag{2}$$

folgt dann zusammen mit der Definition des Energie-Impulstensors

$$\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu} \equiv -2 \frac{\delta \sqrt{-g} L}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{3}$$

die Divergenzfreiheit desselben:

$$T^{\mu\nu};^{\nu} = 0.$$

Die Variation bezüglich $g_{\mu\nu}$ in 1. liefert die Einsteinschen Gleichungen:

$$-\varkappa T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R. \tag{5}$$

Es ist wünschenswert, die allgemeinrelativistische Kontinuumsmechanik in dieses Schema einzuordnen. Zu diesem Zweck muß man überlegen, welche Größen jetzt den Feldvariablen ψ^A entsprechen. Ferner wird man eine geeignete Definition für ein konservatives mechanisches Kontinuum zu treffen haben, da in Anwesenheit von dissipativen Effekten die Existenz eines Variationsprinzips nicht zu erwarten ist. Nun suchen wir in der Kontinuumsmechanik letztlich eine Kongruenz zeitartiger Weltlinien mit dem normierten Tangentenvektor u^μ

$$u^\mu u_\mu = -1. \tag{6}$$

Anstatt das kontravariante Vektrofeld u^μ zu suchen, kann auch eine Koordinatentransformation.

$$a^\varkappa = A^\varkappa(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{7}$$

gesucht werden, derart daß das neue Koordinatensystem ein mitbewegtes ist, d. h. daß in ihm die Weltlinienkongruenz durch

$$a^k = \text{const.}, \quad a^4 = \text{variabel} \tag{8}$$

beschrieben wird. (Griechische Indizes laufen von 1 bis 4, lateinische von 1 bis3).

Das erwähnte Programm läßt sich nun durchführen, indem man die ψ^A mit den $a^\varkappa$ (7) identifiziert. Von diesem Standpunkt aus wird die Kontinuumsmechanik konservativer Systeme als eine Feldtheorie erscheinen, die insofern entartet ist, als die Gleichungen (2) und (4) identisch werden.

Im folgenden sollen alle Größen im $a^\varkappa$-System mit einem Querstrich versehen werden. Es ist dann:

$$\bar{u}^\alpha = \frac{\delta^\alpha_4}{\sqrt{-\bar{g}_{44}}}; \quad \bar{u}_\beta = \frac{\bar{g}_{4\beta}}{\sqrt{-\bar{g}_{44}}}. \tag{9}$$

Bezeichnen wir die zu (7) inversen Transformationen durch

$$x^\mu = \varphi^\mu(a^1, a^2, a^3, a^4), \tag{10}$$

und benutzen wir die Abkürzung

$$\varphi^\mu_\lambda \equiv \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial a^\lambda}, \tag{11}$$

so ergibt sich

$$u^\mu = \frac{\varphi^\mu}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\varphi^\alpha_4 \varphi^\beta_4}}. \tag{12}$$

Auf diese Weise bereits u^μ als Funktional der $g_{\alpha\beta}$ und der „Feldgrößen" $a^\varkappa$ ausgedrückt.

Um den konservativen Charakter des Systems auszudrücken, führen wir zunächst den Projektionstensor $S_{\alpha\beta}$ vermöge

$$S_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \tag{13}$$

ein. Es ist

$$\overline{S}_{ik} = \gamma_{ik}, \tag{14}$$

wobei γ_{ik} gemäß

$$dl^2 = \gamma_{ik} da^i da^k \tag{15}$$

für den räumlichen Abstand von benachbarten weltlinien maßgebend ist. Weiter benutzen wir die Identität von C. Eckart [1]

$$T^{\mu\nu} \equiv w u^\mu u^\nu + u^\mu w^\nu + u^\nu w^\mu + w^{\mu\nu}, \tag{16}$$

wobei

$$w \equiv T^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma$$

die Energiedichte im lokalen Minkowskischen Ruhsystem,

$$w^\alpha \equiv - S^\alpha_\varrho T^{\varrho\sigma} u_\sigma$$

der Wärmestrom und

$$w^{\alpha\beta} \equiv S^\alpha_\varrho S^\beta_\sigma T^{\varrho\sigma}$$

der Drucktensor ist. Der konservative Charakter des Systems erfordert zunächst

$$w^\alpha = 0 \tag{17}$$

anzunehmen. Weiter fordern wir, daß die Spannungen $-\overline{w}^{ik}$ im mitbewegten Koordinatensystem aus einem Potential Φ gemäß

$$2\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{e}_{ik}} = -\overline{w}^{ik} \tag{18}$$

zu bestimmen sind. Hierbei erklären wir den Deformationstensor im mitbewegten System durch die Differenz zweier metrischer Tensoren

$$\overline{e}_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma^*_{ik}, \tag{19}$$

wobei für unsere Zwecke nur

$$\frac{\partial \gamma^*_{ik}}{\partial a^4} = 0 \tag{20}$$

verlangt werden muß. Hängt $g^*_{\mu\nu}$ mit γ^*_{ik} in derselben Weise zusammen wie $g_{\mu\nu}$ mit γ_{ik} und bedeutet „$||$" die mittels $g^*_{\mu\nu}$ gebildete kovariante Ableitung, so ist (20) gleichbedeutend mit

$$u_{\nu||\mu} + u_\nu u_{\mu||\varkappa} u^\varkappa + u_{\mu||\nu} + u_\mu u_{\nu||\varkappa} u^\varkappa = 0, \tag{21}$$

dh. bezüglich der Hilfsmetrik $g^*_{\mu\nu}$ beschreibt die wirkliche Weltlinienkongruenz eine starre Bewegung im Sinne von Born und Rosen. Wir sind hier einer Idee von Rayner [2] gefolgt um den Begriff der Deformation in der allgemeinen Relativitätstheorie zu definieren.

Die Dichte ϱ kann durch

$$\frac{1}{\varrho} \equiv v \equiv \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma^*}} \tag{22}$$

definiert werden. v ist ein Analogon zum spezifischen Volumen. Es ist das verhältnis der Volumina ein und derselben kleinen Materiemenge im mitbewegten System einmal gemessen mittels der wirklichen Metrik, zum andern mittels der Hilfsmetrik, bezüglich derer die Bewegung eine starre ist.

Es gilt identisch die Kontinuitätsgleichung

$$(\varrho u^{\mu})_{;\mu} = 0. \tag{23}$$

Schließlich setzen wir noch

$$w = \varrho \Phi. \tag{24}$$

Sodann kann die Theorie aus einem Variationsprinzip (1) hergeleitet werden, wenn

$$L = \varrho \Phi(\bar{e}_{ik}) \tag{25}$$

angenommen wird. Hierbei ist γ^*_{ik} als Funktion von a^1, a^2, a^3 anzusehen, während für γ_{ik} gemäß (14)

$$\gamma_{ik} = \varphi^{\varrho}_{i} \varphi^{\sigma}_{\varkappa} S_{\varrho\sigma} \tag{26}$$

geschrieben werden muß.

Auf den Beweis gehen wir hier nicht ein. Er läst sich am besten durch eine leichte Weiterentwicklung der Methode von Fock [3] erbringen.

Der Spezialfall einer idealen Flüssigkeit, in welchem

$$T^{\mu\nu} = (w + p) u^{\mu} u^{\nu} + g^{\mu\nu} \cdot p \tag{27}$$

ist, erhält man, indem man

$$\Phi = \Phi(v) \tag{28}$$

annimmt, und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = -p \tag{29}$$

setzt. Dieser Fall gestattet noch eine andere Variationsmethode. Um sie darzulegen, ersetzen wir (28) durch

$$\Phi = \Phi(v, \eta) \tag{30}$$

wobei η die spezifische Entropie ist. Außerdem sei in Ergänzung zu (29) die Temperatur T durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = T, \tag{31}$$

gegeben. Schließlich führe man die spezifische Enthalpie h vermöge

$$h \equiv \Phi + pv \tag{32}$$

ein. Für sie gilt gemäß (29) und (31)

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{1}{\varrho}, \qquad \frac{\partial h}{\partial \eta} = T. \tag{33}$$

Sodann kan durch eine Betrachtungsweise, die eine geeignete relativistische Modifikation der Clebsch-Transformationen darstellt, gezeigt werden, daß die mit (27) formulierten Ausgangsgleichungen äquivalent ist:

$$\begin{cases} hu_\mu = \psi,_\mu + \alpha\eta,_\mu. \\ \eta,_\mu u^\mu = 0, \quad \alpha,_\mu u^\mu = T \end{cases} \tag{34}$$

sowie in Ergänzung dazu (6) und (23).
Man setzte nun in (1).

$$L = \varrho \left\{ -\frac{h}{2} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + u^\mu(\psi,_\mu + \alpha\eta,_\mu) + \frac{h}{2} \right\} - p \tag{35}$$

und fasse h als Funktion von η und p auf, welche (33) genügt, sowie ϱ als Funktion dieser Variablen. Variiert man dann unabhängig voneinander die vier u^μ sowie die vier Skalare ψ, α, η, p und schließlich die $g_{\mu\nu}$, so liefert die Variation nach den ersten acht jener Variablen die acht Gleichungen (34), (6), und (23), während die Variation nach den $g_{\mu\nu}$ wieder die Einsteinschen Feldgleichungen (5) ergibt.

Ausführliche Rechnungen zu den hier behandelten Problemen sowie inhaltliche Ergänzungen nebst weiteren Literaturangaben finden sich in zwei Arbeiten des Verf. [4], [5].

LITERATUR

[1] C. Eckart: Phas. Rev. *58*, 919. (1940).
[2] C. B. Rayner: Proc, Roy. Soc. *A. 272*, 44, (1963).
[2] V. Fock: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, (Deutsche Übersetzung), Berlin (1960) §§ 47, 48.
[4] H. G. Schöpf: *12*, 377, (1964) Ann, Phys.
[5] H. G. Schöpf: *17*, 41, (1964) Acta Phys. Hung.